**2.1 群,环和场[Groups,Rings,and Fields]** 2020年11月2日09点47分

在接下来的三章中,对基本代数结构(组,环,场,向量空间)进行了概述,重点是向量空间.线性代数的基本概念,例如向量空间,子空间,线性组合,线性独立性,基数,商空间,线性图,矩阵,基数的变化,直接和,线性,式,对偶空间,超平面,线性图的转置.

实数集具有两个运算(加法)和(乘法)满足以下性质,使得在+下成为阿贝尔群,而在下成为阿贝尔群.回忆一下群的定义.

**定义2.1** 一个群是一个集合,其配备有二元运算,将每一对元素关联到单个元素,并且具有以下属性:是结合的[associative],具有**恒等(单位)元素**,并且中每个元素都是可逆的().更明确地说,这意味着以下等式对所有均成立:

(G1)

(G2)

(G3) 对于每一个,存在某些,使得. (逆)

一个群是阿贝尔(或可交换的)仅当

集合加上一个运算和一个元素仅满足条件(G1)和(G2),则称为**幺半群[monoid]**.例如,自然数的集合的是加法运算下的(可交换)幺半群.但是,它不是一个群.

**例2.1**

1. 整数集合是一个加法运算下的群,其恒等元素为0.但是,不是乘法运算下的群.
2. 有理数集合(即分数,其中且)是一个加法运算下的群,其恒等元素为0.集合是乘法运算下的群,其中恒等元素为1.
3. 给定任何非空集S,双射集,也称为S的排列,是函数合成下的一个群(即,和的乘积是组合）,恒等元素是恒等函数.只要具有两个以上元素,该组就不是阿尔贝群.
4. 具有实（或复）系数的可逆矩阵的集合是矩阵乘法下的群,单位元素为单位矩阵.该群称为一般线性群,通常用或()表示.

习惯上用+表示阿贝尔群的运算,在这种情况下,元素的逆用表示.

群的单位元素是唯一的.实际上,我们可以证明一个更普遍的事实:

**事实1**.如果二元运算是结合的,并且如果是左单位[left identity],而是右单位[right identity],则意味着

且

则.

事实1表示幺半群的单位元素是唯一的,并且由于每个群都是幺半群,所以一个群的单位元素是唯一的.此外群中的每个元素都有唯一的逆,这是由于稍微普遍一点的事实造成的:

**事实2** 在具有单位元素e的幺半群M中,如果某个元素具有一些左逆和一些右逆,这意味着

且

则.

**备注**:公理(G2)和(G3)可以通过仅要求（G2r）（存在右身份）和（G3r）（每个元素都存在右逆）（或（G21）和 （G3l））。 证明组公理（G2）和（G3）遵循（G2r）和（G3r）是一个很好的练习。

如果群具有有限数量的个元素，那么我们说是阶数为的群.如果G是无限的,我们说G具有无限阶数.群的阶数通常用表示(如果G是有限的).

给定群,对于任何两个子集,我们令

特别是对于任何,如果,我们写

同样，如果,我们写

从现在开始,我们将删除乘法符号,用代替.

对于任意,定义,通过的左侧平移,,以及,通过的右侧平移,.观察到和是双射.我们为展示了这一点,的证明类似.

如果,则,并在左边乘以,我们得到,因此是单射的.对于任何,我们都有,因此是满散.因此,是双射.

**定义2.2** 给定群,的子集是G的子群[subgroup]当且仅当

1. 的单位元素也属于();
2. 对于所有,我们有;
3. 对于所有,我们有.

**命题2.1** 给定一个群,子集是的子群当且仅当是非空的且对于任意,.

如果群G是有限的,则可以使用以下准则.

**命题2.2** 给定一个有限群,子集是的子群当且仅当

1. ;
2. 在乘法下是闭合的.

**定义2.3** 如果是的子群并且是任意元素,则形式的集合在中被称为的**左陪集[left cosets]**,而形式的集合在中被称为的**右陪集[right cosets]**.

的左子集(相应的右子集)产生等价关系,定义如下:对所有的,

(相应的.).显然,是一个等价关系.

现在,我们声称当且仅当,当且仅当.

因此,元素的等价类为陪集(相应的为).由于是和之间的双射,因此陪集都具有相同的**基数[cardinality]**.映射是左陪集和右陪集之间的双射,因此它们也具有相同的基数.由于不同的陪集形成G的分割,因此我们得到以下事实:

**命题2.3(拉格朗日)** 对于任何有限群和的任意子群,的阶整除的阶.

的比值用()表示,称为在中的索引.索引()是在中的左(和右)陪集的数量.命题2.3可以陈述为

在中的左陪集(通常不是群)的集合表示为.的“点”是通过将陪集中的所有元素“收缩”为单个元素而获得的.

通过在左陪集(或右陪集)来定义乘法运算很诱人

但是,除非子群H具有特殊属性,否则通常不会很好地定义此操作.该性质是群同态核的典型特征,因此我们可以得出

**定义2.4** 给定任意两个群和,函数是**同态[homomorphism]**当且仅当

令,我们得到

令且,我们得到

如果和是群同态,则也是同态的.如果是群同态,并且是两个子群m因此很容易验证

是的一个子群,称为的图像,并且

是的一个子群.特别是,当时,我们获得的内核.从而,

可以验证是单射的当且仅当.(我们也写.)我们说是**同构的[isomorphism]**仅当存在一个同态,使得

在这种情况下,是唯一的,它表示为.当是同构时,我们说群和是**同构的[isomorphic]**.不难看出,双射同态是同构.当时,群同构称为**自同构[automorphism]**.左平移和右平移是的自同构.

我们声称满足以下属性:

首先,请注意等于

上面等价于

这是因为意味着,并且对于所有都是这样.但是,

对于所有和所有成立.因此,根据的定义,我们有.

**定义2.5** 对于任意群,的子群是G的**正规子群[normal subgroup]**当且仅当

这表示为.

观察到,如果是阿贝尔群,则的每个子群都是正规的.

如果是的一个正规子群,则左陪集诱发的当量关系与右陪集诱发的当量关系相同.此外,该等价关系是全等的,这意味着:对于所有,

如果且,则,且

如果,则.

结果,我们可以通过对等价类的模的集合定义一个群结构,方法是

该群表示为,并称为G与N的商[quotient].元素的等价类也表示为(或[g]).映射定义为

显然是称为同构投影的群同态.

给定群的同态,我们可以轻松地验证群和是同构的.这通常被称为**第一同构定理[first isomorphism theorem]**.

构建产品组的一种有用方法是直接乘积[direct product]构建.给定两个群G和H,我们将G×H设为集合G和H的笛卡尔乘积,

很容易验证G×H是一个群.类似地,给定任意n个群,我们可以用类似的方法定义直接乘积.

如果G是一个阿贝尔群,则是G的子群,情况比较简单.考虑映射

由下列给定

使用+用于群G的操作.可以很容易地验证是一个群同态,因此它的图像是G的一个子群,用表示,称为群的总和.需要以下命题.

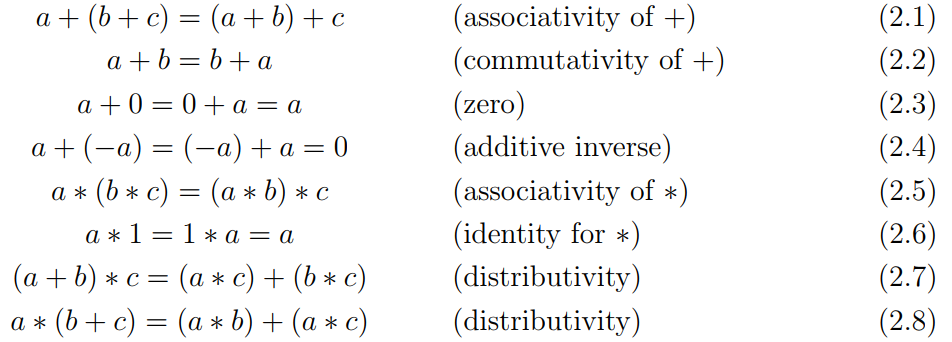
**命题2.4** 给定一个阿贝尔群,如果和是的任何子群,使得,则映射是一个同构

在命题2.4的条件下,即,群称为和的直接和；它由表示，我们有一个同构.

**定义2.6** **环[ring]**是一个集合A,它具有两个运算符(称为加法)和(称为乘法),具有以下属性的:

1. A是一个阿贝尔群;
2. 是结合的,并且具有单位元素;
3. 是分配的.

用于加法的单位元素表示为0,的加法逆表示为.更明确地,环的公理是对所有成立的下列公式:



环A是**可交换的[commutative]**仅当

从(2.7)和(2.8),我们可以轻松获得

注意,(2.9)表示如果,则对于所有,则,因此,.环称为**平凡环[trivial ring]**.的环称为非平凡环.两个元素的乘积通常用表示.

例2.2

加法群是交换环.

具有实系数单变量多项式组是多项式相乘下是一个环.也是交换环.

矩阵的群是矩阵乘法下的一个环.但是,它不是交换环.

连续函数的群是在操作下定义的环,其中

当ab = 0且b 6 = 0时，我们说a是零除数。 如果0 6 = 1，则环A是整数域（或整个环），A是可交换的，对于所有a，ab = 0表示a = 0或b = 0。 b 2A。换句话说，积分域是一个非平凡的交换环，除0以外没有零除数。

例2.3

环Z； 问; R; C是不可分割的领域。

具有实系数的一个变量中的多项式环R [X]是一个积分域。

对于任何正整数p 2 N，在Z上定义一个关系，表示为m≡n（mod p），如下所示：

读者可以轻松地检查这是否是等价关系，而且，它在加法和乘法方面是兼容的，这意味着如果m1≡n1（mod p）和m2≡n2（mod p），则m1 + m2 ≡n1 + n2（mod p）和m1m2≡n1n2（mod p）。 因此，我们可以定义一组等价类（mod p）的加法运算和乘法运算：

同样，读者可以轻松地检查是否满足环形公理，其中[0]为零，[1]为乘法单位。 所得的环由Z = pZ.1表示。请注意，如果p是合成的，则该环具有零除数。 例如，如果p = 4，则我们有

但是，读者应证明，如果p为质数，则Z = pZ是整数域（实际上，它是一个字段）。

n×n矩阵Mn（R）的环不是整数域。 它具有零除数。

环之间的同态是保留加法和乘法(以及0和1)的映射.

**定义2.7** 给定两个环和,它们之间的同态是函数对所有都满足以下条件:

实际上,因为B是一个加法的群,所以是从

例2.4

如果A是一个环,对于任何整数,对于任何,我们定义为

如果()并且

如果.则映射由下列给定

是环同态(其中是A的乘法单位).

给定任何实数,评估映射定义为

对每一个多项式,是环同态.

环同态是同构当且仅当存在一个同态使得和.则g是唯一的并且由表示.容易证明双射环同态是同构.从环到自身的同构称为自同构.

给定一个环,如果是的子群(在加法下)，在乘法下闭合且包含1,则A的子集是A的**子环[subring]**.如果是一个环同态,则对于任意子环,是图像是B的子环,并且对于B的任意子环,逆图像是A的子环.

**定义2.8** 如果集合是一个环并且具有以下属性,则它是一个**场[field]**:

(F1) ;

(F2) 是一个群(即每一个具有一个逆);

(F3) 是可交换的.

如果∗不是可交换的,但(F1)和(F2)成立,我们说我们有一个**偏场[skew field]**(或非可交换场).

注意,我们假设场的运算\*是可交换的.这个约定不是普遍采用的,但是由于∗对于我们将遇到的大多数场都是可交换的,因此我们也可以在定义中包括此条件.

例2.5

环Q，R和C是场.

多项式f（X）的（形式）分数f（X）= g（X）的集合； g（X）2 R [X]是一个字段，其中g（X）不是空多项式。

连续函数f：] a;的环C（] a; b [） b [！ R使得对于所有x 2] a f（x）6 = 0； b [是一个字段。

每当p为质数时，环Z = pZ就是一个场。

两个场和之间的同态只是环和之间的同态.但是,由于和是乘法下的群,因此场的同态必须是单射的.

首先,观察到对于任意,

且

因此且

但是,如果,则必须.因此,是单射的.

场同态h：K1！ 当存在同态g时，K2是同构的：K2！ K1使得g？f = idK1和f？g = idK2。 那么，g是唯一的并且由h-1表示。 容易证明双射场同态h：K1！ K2是同构的。 从字段到自身的同构称为自同构。

由于每个同态h：K1！ 两个场之间的K2是单射的，图像f（K1）是K2的子场。 我们也说K2是K1的扩展。 如果每个系数为K的多项式p（X）都以K为根，则称字段K是代数封闭的。 就是说，存在一个2 K使得p（a）=0。可以证明每个场K都有一些最小扩展Ω，它是代数闭合的，称为K的代数闭合。例如，C是代数 Q和C的关闭。

给定一个字段K和一个自同构h：K！ K，K，很容易检查设置

由h固定的K的元素的元素是K的子字段，称为由h固定的字段。

如果K是一个场，我们具有环同态h：Z！ 由h（n）= n·1给出的K。如果h是内射词，则K包含Z的副本，并且由于它是一个字段，因此包含Q的副本。在这种情况下，我们说K具有特征0 如果h不是内射性，则h（Z）是K的子环，因此是一个积分域，对于p≥1，它对于Z = pZ是同构的。但是，由于Z = pZ是一个整数，所以p必须是质数。 整数域，如果它是一个字段，如果p是素数。 素数p称为K的特征，我们也说K具有有限的特征.

**2.2 向量空间** 2020年11月9日09点29分

对于每一个,令为元组的集合.可以将加法扩展为,如下所示:

.

我们还可以定义一个运算如下:

.

所得的代数结构具有一些有趣的性质,即向量空间的性质.

在定义向量空间之前,我们需要讨论一个战略选择,根据它的解决方式,它可能会减少或增加处理诸如线性组合和线性依赖性(或独立性)之类的概念时的麻烦.这个问题与使用向量集和向量序列有关.

我们的经验告诉我们,最好使用向量序列.更好的索引向量族.(我们并不是唯一选择序列集的人,而且我们相处得很好;例如,Artin[4],Axler[6]和Lang[66]使用序.但是,一些著名的作者,例如Lax[70]个使用集.我们将其留给读者进行此问题的调查.)

给定一个集合,回想一下一个序列是一个有序的元组,其中,是自然数.序列的元素不必不同,顺序很重要.例如,和是中的两个不同序列.它们的基是.

我们刚刚定义的是有限序列，也可以看作是从到集合的函数;序列的第个元素是在该函数下图像.这个观点是富有成果的,因为它允许我们将(可数的)无限序列定义为函数.但是,为什么将自己限制为有序集合,例如或作为索引集？

索引集的主要作用是唯一地标记每个元素,并且标记的顺序虽然很方便,但并不是关键.因此,很自然地将的一个索引元素族(简称一个族)定义为函数,其中被视为索引集的任意集合.由于函数由其图确定

可以将族视为成对的集合.为了简化符号,我们写代替,用表示族.例如,如果和,对的集合

是一个索引族.元素2在族中出现两次,带有两个不同的标签r和b.

当索引集完全排序时,一个族通常称为I序列.有趣的是,集合可以看作是族的特例.实际上,集合可以看作是与等价函数相对应的A索引族.

备注:索引族不应与多集混淆.在给定任何集合A的情况下,**多集[multiset]**与集合相似,不同之处在于的元素可能出现多次.例如,如果,则是一个多集.每个元素都有一定的多重性,但是元素的顺序无关紧要.例如,具有多重性3.形式上,多集是函数,或等效地是对的集合.因此,多集是来自的索引元素族,但不是索引族元素,因为不同的元素可能具有相同的多重性(例如上例中的和).索引族是序列的一般化,而多集是集合的一般化.

我们还需要注意一个烦人的技术问题,即定义形式的和,其中是任何有限索引集,而是某些集合中配有二进制运算的元素族,满足结合律和（公理（G1））和交换律.当我们定义线性组合时会出现这种情况.

问题是二进制运算+仅告诉我们如何为的两个元素计算,但没有告诉我们三个以上元素的总和如何计算.例如,应该如何定义?

我们要做的是通过使用分别包含两个元素的一系列步骤来定义,并且有两种可能的方法来实现:和.如果我们的操作不具有结合性,则它们是不同的值.如果可结合,则,但是索引仍然有六个可能的排列,并且+如果不是可交换的,则这些值通常是不同的.如果我们的运算是可交换的,那么所有六个排列都具有相同的值.因此,如果+是结合的和可交换的,从直观上看,显然形式的和不取决于用于计算它的运算的顺序.

确实是这种情况,但是严格的证明需要归纳,并且令人惊讶地涉及到这样的证明.读者可以不加证明地接受形式的和确实定义明确的事实,然后直接跳至2.9定义.

**命题2.5** 给定任何配备有结合二元运算符的非空集合,对于具有不同自然数的任何非空有限序列,以及将划分为个非空序列,对于具有不同自然数非空序列,使得,意味着其中,对于中的任意元素序列,我们有

**命题2.6** 给定任何配备有结合和可交换二元运算的非空集,对于具有不同自然数的任意两个非空有限序列和,使得是的一种排列(换句话说,构成和的集合是相同的),对于中的任意元素序列,我们有

**定义2.9** 给定一个场(包含加+和乘\*运算),上的**向量空间**(或K-向量空间)是(向量的)集合以及两个运算(称为矢量加法),和(称为矢量乘法)满足下列条件,其中:

(V1) 是一个阿贝尔群,单位元素为0;

(V2) ;

(V3) ;

(V4) .

其中表示场K中的乘积.

**2.3 线性独立性;子空间** 2020年11月9日15点03分

如果A是一个单位元素为0的阿贝尔群(通常,当A是一个环或向量空间时),我们说如果对所有i 2 I − J的ai = 0，一个家庭（ai）i2I具有有限的支持,其中J为 我的有限子集（家庭的支持）。

**定义2.10** 令为向量空间.向量是E中元素族的**线性组合**仅当中存在标量族使得

当时,我们规定.我们说族是**线性独立的**,对于中每一个标量族,使得

等效地,族是**线性依赖的**,对于中每一个标量族,使得

我们约定,当时,族是线性独立的.

**定义2.11** 给定一个向量空间,的子集是的**线性子空间**(或子空间)仅当是非空的并且,其中.

每一个子空间都包含0向量.

**命题2.7** 给定任何向量空间,如果是的任何非空子集,则中包含的最小子空间(或Span(S))是S中元素的所有(有限)线性组合的集合.

本节剩余内容值得一读.

**2.4 向量空间的基** 2020年11月16日10点05分

**定义2.12** 给定向量空间和的子空间,向量的族跨度或如果对于每个都产生,则中存在标量的族使得

我们也说的元素是的生成器,并且由跨越,或由生成.如果的子空间由有限族生成,则说是有限生成的.跨越且线性独立的族称为的基.

**引理2.8** 给定向量空间的元素的线性独立族,如果不是的线性组合,则将添加到族得到的新族是先行独立的(其中).

**定理2.9** 给定任何产生向量空间的有限族和的任何线性独立子族(其中),则存在一个基使得.

**备注**:定理2.9也适用于非有限生成的向量空间.在这种情况下,问题是要保证存在一个最大的线性独立族B,使得.可以使用Zorn引理来证明这种最大族的存在,请参阅附录35和那里给出的参考文献.

向量空间在系数域的情况下需要定理2.9的完整一般化.数字和在上是线性独立的,所以根据定理2.9,线性独立族可以扩展为的一个基.由于是不可数的,但是可数的,因此这样的基必须是不可数的.

令是中的向量族.如果它是线性独立的,并且对于任何向量,通过将添加到得到的新族是非线性独立的,则我们说是的**最大线性独立族**.如果横跨,并且对于任意索引,将从族移出得到的新族无法横跨,则我们说是的**最小生成族**.

命题2.10 给定向量空间E,对于任何E的族,以下属性是等价的:

是的基;

是的最大线性独立族.

是的最小生成族.